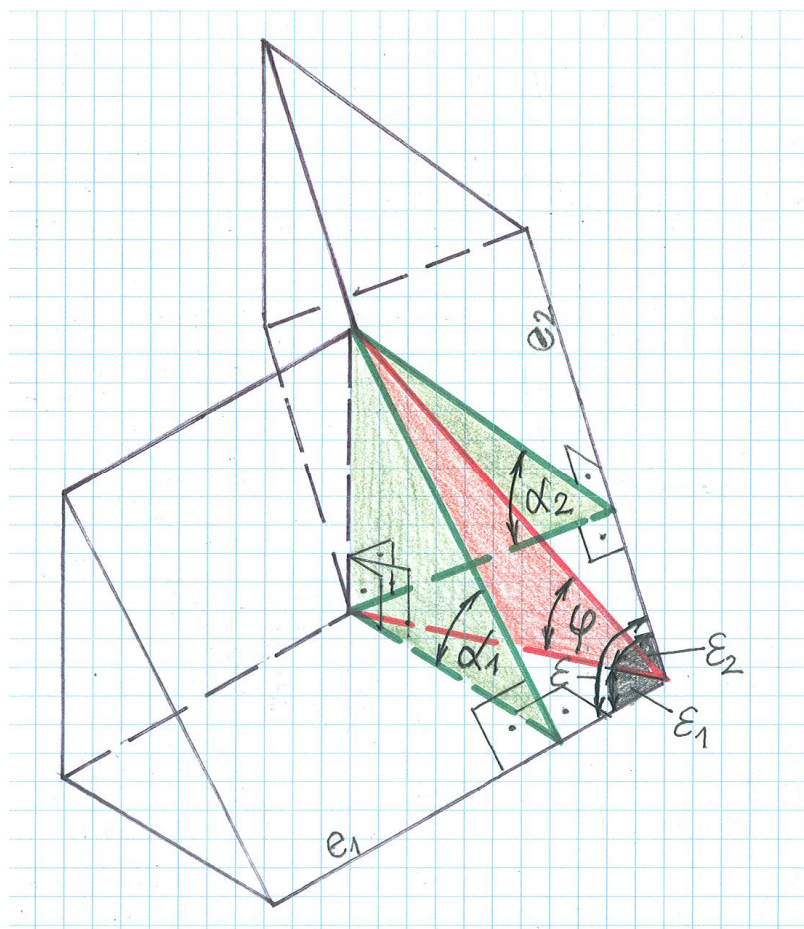


Néhány további szög - összefüggés összemetsződő tetőkre

Egy korábbi dolgozatunkban

– címe: **A szintvonalas eljárásról**, jele: [KD – 1] – levezettünk néhány szög-összefüggést, melyek segítségével újabbakra is szert tehetünk.

Ehhez tekintsük az 1. ábrát is!



1. ábra

A feladat

Adott: ε , α_1 , α_2 .

Keresett: $\varphi = \varphi(\varepsilon, \alpha_1, \alpha_2)$.

Jelölések:

~ α_1 : az e_1 ereszvonalból induló tetősík hajlása;

~ α_2 : az e_2 ereszvonalból induló tetősík hajlása;

~ φ : a tetősíkok metszésvonalának – az élgerincnek – a hajlása;

~ ε : az ereszvonalak által bezárt szög;

~ ε_1 : az e_1 ereszvonal és az élgerinc ereszsíkra vett vetülete által bezárt szög;

~ ε_2 : az e_2 ereszvonal és az élgerinc ereszsíkra vett vetülete által bezárt szög.

A jelölések megegyeznek a korábban is alkalmazottakkal.

A megoldás

A [KD – 1] / (21) képlet szerint:

$$\operatorname{tg} \varphi = \sin \varepsilon_1 \cdot \operatorname{tg} \alpha_1 = \sin \varepsilon_2 \cdot \operatorname{tg} \alpha_2. \quad (1)$$

Átalakításokkal:

$$\left(\frac{1}{\operatorname{tg} \varphi} \right)^2 = \left(\frac{1}{\sin \varepsilon_1} \right)^2 \cdot \left(\frac{1}{\operatorname{tg} \alpha_1} \right)^2 = \left(\frac{1}{\operatorname{tg} \alpha_1} \right)^2 \cdot \frac{\sin^2 \varepsilon_1 + \cos^2 \varepsilon_1}{\sin^2 \varepsilon_1} = \left(\frac{1}{\operatorname{tg} \alpha_1} \right)^2 \cdot \left[1 + \frac{1}{(\operatorname{tg} \varepsilon_1)^2} \right],$$

tehát:

$$\left(\frac{1}{\operatorname{tg} \varphi} \right)^2 = \left(\frac{1}{\operatorname{tg} \alpha_1} \right)^2 \cdot \left[1 + \frac{1}{(\operatorname{tg} \varepsilon_1)^2} \right]. \quad (2)$$

Most felhasználva, hogy [KD – 1] / (13) szerint:

$$\operatorname{tg} \varepsilon_1 = \frac{\sin \varepsilon}{\frac{\operatorname{tg} \alpha_1}{\operatorname{tg} \alpha_2} + \cos \varepsilon}, \quad (3)$$

Majd (2) és (3) - mal:

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{\operatorname{tg} \varphi} \right)^2 &= \left(\frac{1}{\operatorname{tg} \alpha_1} \right)^2 \cdot \left[1 + \frac{1}{\left(\frac{\sin \varepsilon}{\frac{\operatorname{tg} \alpha_1}{\operatorname{tg} \alpha_2} + \cos \varepsilon} \right)^2} \right] = \left(\frac{1}{\operatorname{tg} \alpha_1} \right)^2 \cdot \left[1 + \frac{\left(\frac{\operatorname{tg} \alpha_1}{\operatorname{tg} \alpha_2} + \cos \varepsilon \right)^2}{\sin^2 \varepsilon} \right] = \\ &= \left(\frac{1}{\operatorname{tg} \alpha_1} \right)^2 \cdot \frac{\sin^2 \varepsilon + \cos^2 \varepsilon + 2 \cdot \cos \varepsilon \cdot \frac{\operatorname{tg} \alpha_1}{\operatorname{tg} \alpha_2} + \left(\frac{\operatorname{tg} \alpha_1}{\operatorname{tg} \alpha_2} \right)^2}{\sin^2 \varepsilon} = \\ &= \left(\frac{1}{\operatorname{tg} \alpha_1 \cdot \sin \varepsilon} \right)^2 \cdot \left[1 + 2 \cdot \cos \varepsilon \cdot \frac{\operatorname{tg} \alpha_1}{\operatorname{tg} \alpha_2} + \left(\frac{\operatorname{tg} \alpha_1}{\operatorname{tg} \alpha_2} \right)^2 \right], \end{aligned}$$

tehát:

$$\left(\frac{1}{\operatorname{tg}\varphi}\right)^2 = \left(\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha_1 \cdot \sin \varepsilon}\right)^2 \cdot \left[1 + 2 \cdot \cos \varepsilon \cdot \frac{\operatorname{tg}\alpha_1}{\operatorname{tg}\alpha_2} + \left(\frac{\operatorname{tg}\alpha_1}{\operatorname{tg}\alpha_2}\right)^2\right],$$

innen:

$$\frac{1}{\operatorname{tg}\varphi} = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha_1 \cdot \sin \varepsilon} \cdot \sqrt{1 + 2 \cdot \cos \varepsilon \cdot \frac{\operatorname{tg}\alpha_1}{\operatorname{tg}\alpha_2} + \left(\frac{\operatorname{tg}\alpha_1}{\operatorname{tg}\alpha_2}\right)^2},$$

majd ezzel:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\sin \varepsilon \cdot \operatorname{tg}\alpha_1}{\sqrt{1 + 2 \cdot \cos \varepsilon \cdot \frac{\operatorname{tg}\alpha_1}{\operatorname{tg}\alpha_2} + \left(\frac{\operatorname{tg}\alpha_1}{\operatorname{tg}\alpha_2}\right)^2}}, \quad (4)$$

(4) -ből pedig:

$$\varphi = \arctg \left[\frac{\sin \varepsilon \cdot \operatorname{tg}\alpha_1}{\sqrt{1 + 2 \cdot \cos \varepsilon \cdot \frac{\operatorname{tg}\alpha_1}{\operatorname{tg}\alpha_2} + \left(\frac{\operatorname{tg}\alpha_1}{\operatorname{tg}\alpha_2}\right)^2}} \right]. \quad (5)$$

Az (5) képlet írja le a keresett $\varphi = \varphi(\varepsilon, \alpha_1, \alpha_2)$ összefüggést.

Megjegyzés:

Bár több más képlet - alakot is vizsgáltunk, úgy találtuk, hogy mind közül (5) a leg-szebb.

Speciális esetek

Az alábbi eseteket vizsgáljuk meg:

S1.) $\varepsilon \neq 90^\circ$, $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$;

S2.) $\varepsilon = 90^\circ$, $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$;

S3.) $\varepsilon = 90^\circ$, $\alpha_1 \neq \alpha_2$.

S1.) $\varepsilon \neq 90^\circ$, $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$ eset:

Ekkor (4) -ből:

$$\operatorname{tg} \varphi^* = \frac{\sin \varepsilon \cdot \operatorname{tg} \alpha}{\sqrt{1 + 2 \cdot \cos \varepsilon + 1}} = \frac{\sin \varepsilon \cdot \operatorname{tg} \alpha}{\sqrt{2 + 2 \cdot \cos \varepsilon}} = \frac{\sin \varepsilon \cdot \operatorname{tg} \alpha}{\sqrt{2 \cdot (1 + \cos \varepsilon)}},$$

tehát:

$$\operatorname{tg} \varphi^* = \frac{\sin \varepsilon \cdot \operatorname{tg} \alpha}{\sqrt{2 \cdot (1 + \cos \varepsilon)}} = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sin \varepsilon}{\sqrt{1 + \cos \varepsilon}}. \quad (6)$$

Alkalmazzuk a $\cos \frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}}$ összefüggést – ld.: [1]! –, $x = \varepsilon$ - ra! Ekkor:

$$\sqrt{1 + \cos \varepsilon} = \sqrt{2} \cdot \cos \frac{\varepsilon}{2},$$

amivel (6) így írható:

$$\operatorname{tg} \varphi^* = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sin \varepsilon}{\sqrt{2} \cdot \cos \frac{\varepsilon}{2}} = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{2} \cdot \frac{2 \cdot \sin \frac{\varepsilon}{2} \cdot \cos \frac{\varepsilon}{2}}{\cos \frac{\varepsilon}{2}} = \operatorname{tg} \alpha \cdot \sin \frac{\varepsilon}{2},$$

tehát:

$$\operatorname{tg} \varphi^* = \sin \frac{\varepsilon}{2} \cdot \operatorname{tg} \alpha, \quad (7)$$

innen:

$$\underline{\underline{\varphi^* = \arctg \left[\sin \frac{\varepsilon}{2} \cdot \operatorname{tg} \alpha \right]}}. \quad (8)$$

A (8) képlet [2] - ben is megtalálható, más jelölésekkel, más úton is levezetve.

S2.) $\varepsilon = 90^\circ$, $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$ eset:

Ekkor (8) -ből:

$$\operatorname{tg} \varphi^{**} = \sin \frac{90^\circ}{2} \cdot \operatorname{tg} \alpha = \sin 45^\circ \cdot \operatorname{tg} \alpha = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\sqrt{2}},$$

tehát:

$$\operatorname{tg} \varphi^{**} = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\sqrt{2}}; \quad (9)$$

innen:

$$\underline{\underline{\varphi^{**} = \operatorname{arctg} \left[\frac{\operatorname{tg} \alpha}{\sqrt{2}} \right]}}. \quad (10)$$

Megjegyzés:

A (9) képlet megfelelője megtalálható [2] , [3] - ban is.

S3.) $\varepsilon = 90^\circ$, $\alpha_1 \neq \alpha_2$ eset:

Ekkor (4) -ből:

$$\operatorname{tg} \varphi^{***} = \frac{\operatorname{tg} \alpha_1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\operatorname{tg} \alpha_1}{\operatorname{tg} \alpha_2} \right)^2}}, \quad (11)$$

innen:

$$\underline{\underline{\varphi^{***} = \operatorname{arctg} \left[\frac{\operatorname{tg} \alpha_1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\operatorname{tg} \alpha_1}{\operatorname{tg} \alpha_2} \right)^2}} \right]}}. \quad (12)$$

Megjegyzések:

M1. A (11) képlet átalakításával nyerhető az egy korábbi dolgozatunkban
– címe: *A szimmetrikus kontytető adatai közötti összefüggésekről* – is megjelent

$$\operatorname{ctg}^2 \varphi^{***} = \operatorname{ctg}^2 \alpha_1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha_2 \quad (13)$$

képlet.

M2. Érdekes, hogy a fentebb levezetett összefüggésekkel viszonylag ritkán, illetve egyáltalán nem lehet találkozni az általunk látott, tetőkkel foglalkozó szakirodalomban.

M3. A (7), (9), (11) képletekből könnyen kiolvasható, hogy ezekben az esetekben:

$$\varphi^* < \alpha, \quad \varphi^{**} < \alpha, \quad \varphi^{***} < \alpha_1.$$

Az (1) képlet alapján pedig általában:

$$\varphi < (\alpha_1, \alpha_2). \quad (14)$$

Irodalom:

- [1] – I. N. Bronstejn ~ K. A. Szemengyajev: Matematikai zsebkönyv
Műszaki Könyvkiadó, Budapest, több kiadásban
- [2] – Galgóczi Gyula: Diplomamunka
Soproni Egyetem Tanárképző Intézet, okl. mérnöktanári szak
Sopron, 1999.
- [3] – Hagen Prehl: Hölzerne Dachkonstruktionen
2. Auflage, Werner Verlag, 2001.

Összeállította: Galgóczi Gyula
mérnöktanár

Sződliget, 2009. november 29.